Institut National Agronomique INA-ENSA 1984

MATHÉMATIQUES
(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION
DURÉE : 3 heures

Un corrigé

Première partie

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(n+1)} \frac{x^{n+1-k}}{(n+1-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n+1)} \frac{x^{n+1-k}}{(n+1-k)!} + a_{n+1}^{(n+1)}.$$

Donc

$$P'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n+1)} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}.$$

D'où, par unicité des coefficients, $a_k^{(n+1)} = a_k^{(n)}$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

2. (a) On va montrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe de manière unique par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
P_0 est bien défini de manière unique. Montrons d'abord l'unicité puis l'existence.
UNICITÉ : On suppose que B_{n+1} et C_{n+1} conviennent. On a alors $B'_{n+1} = C'_{n+1} = B_n$. Ce qui permet d'en déduire qu'il existe une constante K telle que $B_{n+1} = C_{n+1} + K$.
Or

$$K = \int_0^1 K\mathrm{d}t = \int_0^1 B_{n+1}(t) - C_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 B_{n+1}(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 C_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $B_{n+1} = C_{n+1}$. Ce qui prouve l'unicité.

EXISTENCE : Notons $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Posons ensuite

$$P_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}\mathrm{d}t$$

Si on dérive :

$$P'_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P_n(x).$$

Et si on intègre entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 P_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}\mathrm{d}t = 0$$

Ce qui correspond bien aux propriétés qu'on recherche. On a donc bien défini les polynômes de Bernoulli.

(b) La relation $\int_0^1 P_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 P'_n(t)\mathrm{d}t = 0$ donne $P_n(1) - P_n(0) = 0$. D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} = a_n.$$

où encore

$$\frac{a_0}{n!} + \frac{a_1}{(n-1)!} + ... + \frac{a_{n-1}}{1!} = 0.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a $P_n(1) - P_n(0) = \displaystyle\int_0^1 P_n'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 P_{n-1}(t)\mathrm{d}t = 0$, d'où $P_n(1) = P_n(0) = a_n$.

(d) $P_1(x) = \displaystyle\int_0^x P_0(t)\mathrm{d}t + c = x + c$ et $\displaystyle\int_0^1 P_1(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + c = 0$. D'où $c = \dfrac{-1}{2}$ et donc $P_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$.
$P_2(x) = \displaystyle\int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right) dt + c_1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + c_3$ et comme $\displaystyle\int_0^1 P_1(t)\mathrm{d}t = 0$, on obtient $c_2 = \dfrac{1}{12}$. D'où $P_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}$.
Pour P_3 on trouve $P_3(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{12}$.

Deuxième partie

1. f et g sont continues sur $\mathbb{R}^*$, de plus $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1 = g(0)$ et $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\frac{e^t-1}{t}} = 1 = f(0)$. Donc f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
On a $h(-0) = h(0)$ et si $t \neq 0$

$$\begin{aligned}
h(-t) &= \frac{-t}{e^{-t} - 1} - \frac{t}{2} && (1)\\
&= \frac{-te^t}{1 - e^t} - \frac{t}{2} && (2)\\
&= -t - \frac{-te^t}{1 - e^t} + \frac{t}{2} && (3)\\
&= \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = h(t). && (4)
\end{aligned}$$

Donc h est paire.

2. On a $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + o(t^{n+1})$, ce qui donne :

$$g(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{k-1}}{k!} + o(t^n).$$

On remarque que $f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$ et $g(0) = 1 \neq 0$, donc f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme :

$$f(t) = b_0 + b_1 t + ... + b_n t^n + o(t^n).$$

3. On a $h(t) = f(t) + \dfrac{t}{2} = b_0 + \left(b_1 + \dfrac{1}{2}\right) t + ... + b_n t^n + o(t^n)$. h étant paire, donc $b_{2k+1} = 0$ pour $k = 1, 2, ...$ et $b_1 + \dfrac{1}{2} = 0$.
$b_0 = f(0) = 1$.
L'égalité $f(t)g(t) = 1$ implique

$$\left(\sum_{i=0}^{n} b_i t^i + o(t^n)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{(j+1)!} + o(t^n)\right) = 1$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} c_k t^k + o(t^n) = 1$$

où $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{b_i}{(k-i+1)!}$. D'où, une autre fois $b_0 = 1$ et $\forall k \geq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{b_i}{(k-i+1)!} = 0$.

4. Si $k=n-1$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b_i}{(n-i)!}=0$, donc les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence avec $a_0=b_0$, donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ b_n=a_n.$$

Comme $a_n=b_n$ et $b_{2k+1}=0$, alors $a_{2k+1}=0$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Donc $P_{2k+1}(1)=P_{2k+1}(0)=0$.

Troisième partie

1. Vérifions que la propriété est vraie pour $n=1$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_3(x)G^{(4)}\mathrm{d}x &= \Big[P_3(x)G^{(3)}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 P_3'(x)G^{(3)}\mathrm{d}x & (5)\\
&= -\int_0^1 P_3'(x)G^{(3)}\mathrm{d}x\ \text{ car } P_3(1)=P_3(0)=0 & (6)\\
&= -\Big[P_2(x)G^{(2)}(x)\Big]_0^1+\int_0^1 P_1(x)G^{(2)}(x)\mathrm{d}x & (7)\\
&= P_2(0)G''(0)-P_1(1)G''(1)+\big[P_1(x)G'(x)\big]_0^1-\int_0^1 P_1'(x)G'(x)\mathrm{d}x & (8)\\
&= -a_2(G''(1)-G''(0))+\frac{1}{2}(G'(1)+G'(0))-(G(1)-G(0)) & (9)
\end{aligned}$$

D'où

$$G(1)-G(0)=\frac{1}{2}\big(G'(1)+G'(0)\big)-a_2\big(G''(1)-G''(0)\big)-\int_0^1 P_3(x)G^{(4)}(x)\mathrm{d}x.$$

Donc la propriété est vraie pour $n=1$. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_{2n+3}(x)G^{(2n+4)}(x)\mathrm{d}x &= \Big[P_{2n+3}(x)G^{(2n+3)}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 P_{2n+2}(x)G^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x\\
&= -\int_0^1 P_{2n+2}(x)G^{(2n+3)}(x)\mathrm{d}x\ \text{ car } P_{2n+3}(1)=P_{2n+3}(0)=0\\
&= -\Big[P_{2n+2}(x)G^{(2n+2)}(x)\Big]_0^1+\int_0^1 P_{2n+1}(x)G^{(2n+2)}(x)\mathrm{d}x\\
&= -a_{2(n+1)}\Big(G^{(2(n+1)}(1)-G^{(2(n+1))}(0)\Big)+\int_0^1 P_{2n+1}(x)G^{(2n+2)}(x)\mathrm{d}x\\
&= -a_{2(n+1)}\Big(G^{(2(n+1)}(1)-G^{(2(n+1))}(0)\Big)\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\Big(G^{(2k)}(1)-G^{(2k)}(0)\Big)-(G(1)-G(0))\ \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

D'où

$$G(1)-G(0)=\frac{1}{2}\big(G'(1)+G'(0)\big)-\sum_{k=1}^{n+1}a_{2k}\Big(G^{(2k)}(1)-G^{(2k)}(0)\Big)-\int_0^1 P_{2n+3}(x)G^{(2n+4)}(x)\mathrm{d}x$$

La propriété est donc vraie pour $n+1$. D'où le résultat est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par le principe de récurrence.

2. Considérons la fonction $G(t)=F(\alpha+(\beta-\alpha)t)$ pour $t\in[0,1]$. G est indéfiniment dérivable sur $[0,1]$ et on a $G^{(k)}(t)=(\beta-\alpha)^kF^{(k)}(\alpha+(\beta-\alpha)t)$. En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
F(\beta)-F(\alpha) &= \frac{\beta-\alpha}{2}\big[F'(\beta)+F'(\alpha)\big]-\sum_{k=1}^{n}a_{2k}(\beta-\alpha)^{2k}\Big[F^{(2k)}(\beta)-F^{(2k)}(\alpha)\Big] & (10)\\
&\quad -(\beta-\alpha)^{2n+2}\int_0^1 P_{2n+1}(x)F^{(2n+2)}(\alpha+(\beta-\alpha)x)\mathrm{d}x. & (11)
\end{aligned}$$

On pose $f(x) = F'(x)$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta F'(x)\mathrm{d}x = F(\beta) - F(\alpha)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x &= \frac{\beta-\alpha}{2}\left[f(\beta)+f(\alpha)\right] - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}(\beta-\alpha)^{2k}\left[f^{(2k-1)}(\beta) - f^{(2k-1)}(\alpha)\right] && (12)\\
& \quad -(\beta-\alpha)^{2n+2}\int_0^1 P_{2n+1}(x) f^{(2n+1)}(\alpha+(\beta-\alpha)x)\mathrm{d}x. && (13)
\end{aligned}$$

3. Pour $0 \leq i \leq p$, posons $\alpha_i = \alpha + ih$ et appliquons la dernière formule avec $\alpha = \alpha_i$ et $\beta = \alpha_{i+1}$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x &= \frac{h}{2}\left[f(\alpha_{i+1})+f(\alpha_i)\right] - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(\alpha_{i+1}) - f^{(2k-1)}(\alpha_i)\right] && (14)\\
& \quad -h^{2n+2}\int_0^1 P_{2n+1}(x) f^{(2n+1)}(\alpha_i+hx)\mathrm{d}x. && (15)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x && (16)\\
&= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\left[f(\beta_i+h)+f(\alpha_i)\right] - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}h^{2k}\sum_{i=0}^{p-1}\left[f^{(2k-1)}(\alpha_{i+1}) - f^{(2k-1)}(\alpha_i)\right] && (17)\\
& \quad -h^{2n+2}\int_0^1 P_{2n+1}(x)\sum_{i=0}^{p-1} f^{(2n+1)}(\alpha_i+hx)\mathrm{d}x && (18)\\
&= \frac{h}{2}\left[f(\alpha)+f(\beta)+2\sum_{i=1}^{p-1}f(\alpha_i)\right] - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}h^{2k}\left(f^{(2k-1)}(\beta) - f^{(2k-1)}(\alpha)\right) + R_n && (19)
\end{aligned}$$

où $R_n = -h^{2n+2}\displaystyle\int_0^1 P_{2n+1}(x)\sum_{i=0}^{p-1} f^{2n+1}(\alpha_i+hx)\mathrm{d}x$.

On a $|R_n| \leq ph^{2n+2} \times M_n \times \displaystyle\int_0^1 |P_{2n+1}(x)|\mathrm{d}x$ où $M_n = \displaystyle\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(2n+1)}(x)|$.

4. La formule précédente avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\alpha = 10$, $\beta = 20$, $p = 10$ et $n = 1$ s'écrit :

$$\int_{10}^{20}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\left[f(10)+f(20)+2\sum_{j=1}^{9}f(10+j)\right] - a_2\left[f'(20)-f'(10)\right] + R_1$$

où encore

$$\ln 2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+2\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}\right)\right] - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{400}\right) + R_1$$
$$\ln 2 \sim 0,69314$$

avec $|R_1| \leq 10 \times M_1 \times \displaystyle\int_0^1 |P_3(x)|\mathrm{d}x$.

Or $M_1 = \displaystyle\sup_{x\in[10,20]}\left|\left(\frac{1}{x}\right)^{(3)}\right| = \sup_{x\in[10,20]}\frac{1}{6x^4} = \frac{1}{6\times 10^4}$ et

$$\int_0^1\left|\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}\right| \leq \int_0^1\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}\right) \leq \frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

et donc

$$|R_1| \leq 10 \times \frac{1}{6.10^4} = \frac{1}{36.10^3}.$$

Donc $0,69314$ peut être considérée comme une valeur approchée de $\ln 2$ avec une erreur inférieure ou égal à $\dfrac{1}{36.10^3}$.

• • • • • • • • • • •